

## ارزش گذاری طرح های بازنشستگی توازن نقدینگی با مدل هال-وایت<sup>۱</sup>

بهنام صادق پور<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۰۷/۰۲

تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۲۹

### چکیده

**هدف:** واکاوی مزایای طرح بازنشستگی توازن نقدینگی به عنوان یکی از گزینه های اصلاحات ساختاری صندوق های بازنشستگی در ایران به عنوان هدف این مقاله انتخاب شده است.

**روش:** در این مقاله مزایای بازنشستگی طرح توازن نقدینگی را به عنوان یک تعهد مالی و مشتقه ای از نرخ بهره در نظر می گیریم و با استفاده از مدل های مالی، ارزش سازگار بازار تعهدات را محاسبه می کنیم. از مدل های هال-وایت تک عاملی و دو عاملی برای مدل بندی نرخ اعتباردهی بر اساس اوراق قرضه ای بدون کوپن برای یافتن ارزش سازگار بازار تعهدات استفاده می شود.

**نتیجه گیری:** با استفاده از رویکرد ارزیابی سازگار بازار در طرح های توازن نقدینگی دو مشکل کم برآوردی ارزش تعهدات انصراف از قرارداد و افزایش شدید نرخ کسور نرمال با افزایش سال های خدمت رفع می شود، بنابراین رویکردی مناسب تری برای ارزیابی تعهدات طرح توازن نقدینگی و تأمین سرمایه مخصوصاً با افق دید بلندمدت است.

**واژگان کلیدی:** مدل هال-وایت اوراق قرضه طرح بازنشستگی، توازن نقدینگی، ریسک خنثی.

۱- این مقاله برگرفته از پایان نامه ای تحت حمایت موسسه عالی پژوهش تامین اجتماعی استخراج شده است.

۲- دانش اموخته مقطع کارشناسی ارشد آمار بیمه، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی behnamsadeghpourr@gmail.com

طرح‌های بازنشستگی توازن‌نقدینگی نقش پررنگی در صندوق‌های بازنشستگی کارفرمایان در امریکا دارند؛ به طوری که طبق گزارش مؤسسه تأمین مزایای بازنشستگی کارگران امریکا در سال ۲۰۱۰ بیش از ۱۲ میلیون عضو طرح‌های توازن‌نقدینگی بودند که این تعداد بیش از ۹ درصد از کل شرکت‌کنندگان در طرح‌های بازنشستگی است. شروع رواج استفاده از طرح‌های بازنشستگی توازن‌نقدینگی در امریکا از اواخر دهه‌ی ۱۹۹۰ بود، که چند شرکت بزرگ طرح‌های بازنشستگی مزایای معین خود را به طرح‌های توازن‌نقدینگی تبدیل کردند.

در ابتدا اولین جذابیت طرح‌های توازن‌نقدینگی برای کارگران شباهت ظاهری آن به طرح‌های کسور معین بود. هر دو طرح به ظاهر شامل پرداختی‌های توسط کارگر/ کارفرما در حساب کارگر (مشترک صندوق بازنشستگی) هستند، مبلغ موجود در حساب در طول زمان تجمیع می‌شود و مبلغ انباشته در زمان بازنشستگی به عنوان مزایا به فرد تعلق می‌گیرد. مزایا در این طرح ممکن است به صورت سالانه پرداخت شود که نرخ این تبدیل در زمان بازنشستگی تعیین می‌شود. اما تفاوت‌های مهمی بین دو طرح کسور معین و توازن‌نقدینگی وجود دارد. نخستین تفاوت و مهم‌ترین تفاوت این است که در طرح‌های کسور معین، مبلغ موجود در حساب مشترک صندوق سرمایه‌گذاری می‌شود و سود و زیان بر دارایی به طور مستقیم به حساب فرد اعمال می‌شود. این طرح‌ها همانند صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک ابزاری برای سرمایه‌گذاری هستند و دارایی هر مشترک طرح در کل صندوق دقیقاً مشخص است. اما در طرح‌های توازن‌نقدینگی کسورات و حساب‌ها اسمی هستند؛ به این معنا که مجموع کسورات پرداختی در طول خدمت به علاوه بازده حاصل از سرمایه‌گذاری آن (موجودی حساب) می‌تواند دقیقاً برابر سرمایه لازم برای تأمین مزایای بازنشستگی نباشد. در این طرح بازنشستگی سود و زیان حاصل از سرمایه‌گذاری دارایی‌های متوجه حامی صندوق است. در طرح توازن‌نقدینگی، نرخ بهره تضمین‌شده در زمان عقد قرارداد تعیین می‌شود، این نرخ یا بر اساس یک مقدار ثابت و یا بر اساس نرخ‌های منتشرشده در بازار است. نرخ‌های اعتباردهی اسمی هستند، به این معنا که نرخ بازده واقعی بر کل دارایی‌های صندوق ممکن است بیشتر یا کمتر از نرخ اعتباردهی تعیین‌شده شود. از این رو دارایی‌های صندوق ممکن است، بیشتر یا کمتر از مجموع کسورات اسمی دریافتی از کل اعضا شود. به همین جهت دارایی هر فرد قابل تعیین نیست و حساب هر فرد تنها اسمی است.

فرم مزایا و ویژگی‌های بیان‌شده طرح‌های بازنشستگی توازن‌نقدینگی سبب‌شده این طرح‌ها به لحاظ قانونی در ردیف طرح‌های مزایای معین قرار بگیرند. همین طبقه‌بندی قانونی یک عامل موثر در انتقال از طرح‌های مزایای معین به توازن‌نقدینگی است، به طوری که سبب‌شده در شرایط لازم برای انتقال از طرح‌های مزایای معین به طرح‌های دیگر مثلاً به طرح کسور معین که در ظاهر شکل مزایای یکسانی با توازن‌نقدینگی دارند، انتقال به طرح توازن‌نقدینگی مشکلات کمتری را ایجاد کند. با توجه به این که این طرح‌ها ترکیبی از

ویژگی‌های طرح‌های مزایای معین و کسورات معین را دارند، به آنها طرح‌های ترکیبی نیز می‌گویند.

در طی دهه‌ی ۱۹۹۰ تا اوایل سال‌های ۲۰۰۰ بیشتر مقاله‌ها بر تأثیر انتقال از طرح‌های مزایای معین به توازن نقدینگی بر کارفرمایان و کارگران تمرکز داشت. (شر، ۱۹۹۸)<sup>۱</sup> مزایای طرح‌های توازن نقدینگی و مزایای معین را با یکدیگر مقایسه کردند و نتیجه گرفتند که در طرح توازن نقدینگی به اعضای جوان با سنوات کم خدمت مزایای بهتری تعلق می‌گیرد در حالی که در طرح مزایای معین به اعضا نزدیک به بازنشستگی مزایای بهتری تعلق می‌گیرد. (اسچیبیر، ۲۰۰۰)<sup>۲</sup> مروری در رابطه به افراد برنده و بازنده در انتقال به طرح‌های توازن نقدینگی انجام دادند و برخی از تکنیک‌های بحث برانگیز به کار گرفته شده در انتقال از طرح مزایای معین به توازن نقدینگی را مورد خطاب قرار دادند.

ارزیابی بیم‌سنجی طرح‌های توازن نقدینگی با نتایج مختلف توسط (مورفی<sup>۳</sup>، مک موناگل<sup>۴</sup>، لامن<sup>۵</sup>، ۲۰۰۱) انجام شده است. مورفی و مک‌مانگل هر دو در مورد مسائل برخاسته از به کار بردن تکنیک‌های ارزیابی طراحی شده برای طرح‌های مزایای معین برای طرح‌های توازن نقدینگی را مورد بررسی قرار دادند، به طور مثال مورفی نشان داد استفاده از روش‌های بیم‌سنجی سنتی در انتها باعث یک زیان در محاسبه مزایای اختتام قرارداد که برابر موجودی حساب است می‌شود، به این معنی که مقدار مزایای اختتام قرارداد معمولاً بیشتر از مقدار محاسبه شده با رویکردهای سنتی است. که این نتیجه سازگار با نتایج به دست آمده در این مقاله است.

در این مقاله، مزایای طرح توازن نقدینگی را به عنوان یک تعهد مالی با سررسید مشخص برای حامی طرح در نظر می‌گیریم. طبق این دیدگاه مزایا را می‌توان با استفاده از مدل‌های مالی ارزش‌گذاری کرد. در ارزیابی سازگار بازار طرح توازن نقدینگی، ارزش‌گذاری تعهدات، برآورد پارامترها و مدل‌بندی نرخ‌های اعتباردهی بر اساس اطلاعات موجود در بازار مالی است، در این رویکرد ارزیابی هزینه‌های اضافی در نظر گرفته شده توسط شرکت حامی مالی طرح و ریسک نکول مربوط به آن شرکت لحاظ نشده است. بنابراین ارزش واقعی معامله تعهدات طرح توازن نقدینگی، برای مثال هزینه انتقال تعهدات به یک شرکت بیمه دیگر ممکن است با ارزش بازار محاسبه شده طبق رویکرد سازگار بازار متفاوت شود.

در این رویکرد تنها یک قضاوت شهودی در انتخاب مدل نرخ بهره وجود دارد، اما با توجه به این که هر مدل انتخابی بر داده‌های بازار برازش داده می‌شود، انتخاب مدل‌های مختلف نتایج مشابهی را نتیجه می‌دهد. ارزیابی سازگار بازار با روش‌های ارزیابی بیم‌سنجی مورد استفاده کنونی، به ویژه در بخش

- 1- Sher
- 2- Schieber
- 3- Murphy
- 4- McMonagle
- 5- Lowman

طرح‌های بازنشستگی عمومی که در آن معمولاً، نرخ بهره بسیار بالایی در ارزیابی‌ها استفاده می‌شود سازگار نیست، اما با توجه به نتایج رویکرد سازگار بازار معیار بهتری برای بررسی هزینه تأمین تعهدات و ریسک نسبت به روش‌های ارزیابی سنتی است.

## ◀ ارزش سازگار بازار مزایای بازنشستگی کسب‌شده

### مزایای بازنشستگی کسب‌شده

موجودی حساب فرضی مشترک صندوق در زمان  $t$ ، که برابر با مجموع کسورات پرداختی گذشته از زمان ورود به طرح که با نرخ‌های اعتبار داده شده‌ای تا زمان  $t$  جمع شده‌اند. اگر زمان ارزیابی طرح بازنشستگی توازن نقدینگی را در  $t = 0$  در نظر بگیریم، موجودی حساب فرضی در زمان ارزیابی برابر  $F_0$  است.

فرض کنیم بازنشستگی در زمان  $T > t$  است. برای ارزیابی طرح بازنشستگی توازن نقدینگی، یک رویکرد تعهدی برای مزایای بازنشستگی کسب‌شده تا زمان ارزیابی در نظر می‌گیریم؛ یعنی فرض می‌کنیم مزایای بازنشستگی کسب‌شده مشترک صندوق به ازای کسورات اسمی پرداختی تا زمان ارزیابی برابر با، موجودی حساب فرضی در زمان ارزیابی  $F_0$  است، که با نرخ اعتباردهی تضمین شده  $i^c(t)$  تا زمان بازنشستگی جمع می‌شود، برآورد مقدار  $F_T$  در زمان ارزیابی با مدل بندی نرخ اعتباردهی و جمع  $F_T$  تا  $T$  انجام می‌گیرد. با توجه به این که در این رویکرد مزایای بازنشستگی توسط کسورات گذشته تأمین سرمایه می‌شوند تحت تأثیر افزایش حقوق آتی نیستند، چون افزایش حقوق آتی تنها کسورات آتی را تغییر خواهند داد که هنوز بخشی از تعهدات طرح نیستند، بنابراین برای برآورد مزایای کسب‌شده فرضی برای لحاظ افزایش حقوق‌های آتی در نظر نمی‌گیریم.

برای درک بهتر نحوه محاسبه مزایای کسب‌شده، نخست فرض کنیم نرخ اعتباردهی سالانه است؛ یعنی فرض کنیم نرخ‌های اعتباردهی از زمان ارزیابی تا بازنشستگی به طور سالانه تحت مدل مفروضی شبیه‌سازی می‌شوند یا مقادیر سالانه معلومی دارند. اگر  $i^c(t)$  نرخ اعتباردهی در زمان  $t$  برای سال  $t$  تا  $t+1$  تعریف شود، آنگاه مجموع مزایای بازنشستگی کسب‌شده در زمان بازنشستگی به ازای مبلغ  $F_0$  برابر است با:

$$F_T = F_0 \prod_{t=0}^{T-1} (1 + i^c(t)) \quad (1)$$

با فرض این که نرخ اعتباردهی پیوسته مرکب با نرخ  $i^c(t)$  در زمان  $t$  در سال است، مجموع مزایای بازنشستگی کسب‌شده در زمان بازنشستگی  $T$  به ازای سرمایه‌ی  $F_0$  برابر است با:

$$F_T = F_0 e^{\int_0^T i^c(t) dt} \quad (2)$$

همان طور که مشاهده می کنیم برای این که بتوانیم مزایای بازنشستگی کسب شده در زمان ارزیابی را به مثابه یک تعهد مالی با زمان سررسید معین در نظر بگیریم و با استفاده از مدل های مالی ارزش گذاری کنیم مرگومیر و سایر مفروضات جمعیتی را نادیده گرفتیم. در بخش بعد درباره ارزش گذاری این مزایا با مدل های مالی بحث کرده و سپس حالتی که مرگومیر لحاظ می شود را بررسی می کنیم.

نحوه تعیین نرخ اعتباردهی طرح بازنشستگی توازن نقدینگی در عمل برطبق (وارشافسکی<sup>۱</sup>، ۲۰۱۰) بدین شرح است، هفت درصد از طرح ها نرخ اعتباردهی ثابتی بین سه و هشت درصد در سال را در نظر می گیرند، اما معمولاً نرخ اعتباردهی  $i_t^c$  را یک متغیر تصادفی وابسته به بازار در نظر می گیرند، متداول ترین آنها استفاده از بهره برابر با سود منتشره اوراق خزانه ۳۰ ساله است (در ۴۱ درصد از طرح های بازنشستگی توازن نقدینگی استفاده می شود). (پیشین) روش متداول بعدی، در نظر گرفتن  $i^c(t)$  برابر با بازده بر اوراق خزانه یکساله در زمان  $t$  به علاوه یک سود حاشیه ای اضافی، که معمولاً یک درصد است (توسط ۱۹ درصد از طرح ها استفاده می شود). بهره برابر با بازده بر اوراق خزانه با دوره های زمانی دیگر و یک سود حاشیه ای اضافی در بیش از ۲۰ درصد طرح های توازن نقدینگی در نظر گرفته می شود. در باقی موارد ممکن است از نرخ سود بر اساس بازده سهام و یا از یک نرخ اختیاری استفاده کنند.

### ارزش سازگار بازار

طبق تعریف ارزش اوراق قرضه بدون کوپن،  $p(t, t+k)$  ارزش یک واحدی که در تاریخ سررسید  $t+k$  محقق می شود را در زمان  $t$  نشان می دهد. این مقادیر در زمان  $t$  قابل مشاهده اند و از آنها برای ساختن منحنی بازده در زمان  $t$  استفاده می شود. برای هر  $k > 0$  داریم:

$$p(t, t+k) = e^{-kR(t, t+k)} \quad (3)$$

ارزش اوراق قرضه بدون کوپن  $p(t, t+k)$ ، در واقع عامل تنزیل سازگار بازار در زمان  $t$  برای یک سرمایه گذاری  $k$  ساله را ارائه می دهد؛ به این معنا که، ارزش فعلی سازگار بازار یک واحد پرداختی با تاریخ سررسید  $t+k$  در زمان  $t$  برابر  $p(t, t+k)$  است. در (Bjork, 2009) به طور مفصل راجع به ارزش گذاری اوراق قرضه بدون کوپن صحبت شده است، ارزش گذاری اوراق قرضه بدون کوپن به دینامیک نرخ کوتاه مدت وابسته است و ارزش اوراق قرضه بدون کوپن از رابطه زیر تعیین می شود:

$$p(0, T) = E_0^Q \left[ e^{-\int_0^T r(s) ds} \right]$$

که  $Q$  نشان دهنده ارزش گذاری ریسک خنثی و زیرنویس صفر برای نشان دادن این است که، ارزش اوراق قرضه بدون کوپن بر اساس اطلاعات موجود در بازار مالی در زمان ارزیابی  $t=0$  به دست آمده است.

اگر در رابطه فوق یک مدل بدون آربیتراژ برای ساختار زمانی نرخ‌های بهره آینده فرض کنیم، برای هر مدل این چینی باید متوسط ارزش تنزیل شده پرداختی ثابت به مبلغ یک واحد در زمان  $T$  با ارزش بازار معلوم آن پرداختی در زمان  $t = 0$  مطابقت کند. همچنین روابط زیر بین ارزش اوراق قرضه، نرخ آنی، نرخ آنی به لحظه و نرخ کوتاه‌مدت برقرار است:

$$p(t, t+k) = e^{-kR(t, t+k)} = e^{-\int_0^k f(t, t+u) du} = E_0^Q \left[ e^{-\int_t^{t+k} r(s) ds} \right]$$

که  $r(t) = f(t, t)$

با توجه به این که به ازای موجودی حساب فرضی  $F_0$  در زمان ارزیابی، مزایای کسب‌شده مشترک در زمان بازنشستگی برابر با  $F_T$  است، ارزش سازگار بازار پرداختی‌ای به ارزش  $F_T$  در تاریخ سررسید  $T$  در زمان  $t = 0$  برابر است با:

$${}_0V = E_0^Q \left[ F_T e^{-\int_0^T r(t) dt} \right]$$

در این رابطه  $F_T$  و  $r(t)$  هر دو متغیر تصادفی‌اند و در حالت کلی به هم وابسته‌اند. با فرض این که نرخ اعتباردهی پیوسته است، مزایای کسب‌شده  $F_T$  طبق رابطه (۲) تعریف می‌شود، بنابر

$${}_0V = F_0 E^Q \left[ e^{-\int_0^T (r^c(t) - r(t)) dt} \right] \quad (۴)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد، فاکتور کلیدی در ارزش‌گذاری مزایای طرح توازن نقدینگی رابطه بین نرخ اعتباردهی و نرخ کوتاه‌مدت است. به طور کلی برای تعیین ارزش سازگار بازار مزایا نیازمند یک مدل توأم برای  $r^c(t)$  و  $r(t)$  هستیم. اما دو حالت خاص وجود دارد که می‌توانیم ارزش مزایا را بدون مشخص کردن یک مدل توأم تعیین کنیم. در ادامه این دو حالت را بیان خواهیم کرد.

فرض می‌کنیم  $F_0 = 1$ ، از نماد  $V(0, T)$  برای نمایش هزینه سازگار بازار حامی طرح برای تضمین اعمال نرخ اعتباردهی بر حساب فرضی تا زمان بازنشستگی استفاده می‌کنیم، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(0, T) = E^Q \left[ e^{-\int_0^T (r^c(t) - r(t)) dt} \right] = \frac{{}_0V}{F_0} \quad (۵)$$

که  $V(0, T)$  را می‌توانیم ضریب ارزش سازگار بازار مزایا کسب‌شده نیز بنامیم و آن را می‌توان به این صورت نیز تفسیر کرد، ارزش سازگار بازار تعهدات بازنشستگی به ازای هر یک واحد در حساب فرضی در زمان ارزیابی است.

نکته: همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم در رویکرد بیان‌شده برای محاسبه ارزش سازگار بازار مزایای

بازنشستگی کسب‌شده مرگ‌ومیر در نظر گرفته نشده است، برای در نظر گرفتن مرگ‌ومیر و محاسبه ارزش بیم‌سنجی سازگار با بازار مزایای بازنشستگی کسب‌شده می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم: برای مثال اگر فرض کنیم بیست سال تا بازنشستگی باقی‌مانده است، اگر در صورت فوت مشترک صندوق مزایای بازنشستگی کسب‌شده برابر موجودی حساب فرضی در زمان فوت را به همسر یا فرد تحت پوشش او پرداخت شود، می‌توانیم فرض کنیم  $T = 1, 2, 3, \dots, 20$  است و سپس مقادیر  $V(0, 1)$ ،  $V(0, 2)$ ،  $\dots$ ،  $V(0, 20)$  را با استفاده از رابطه (۵) محاسبه کنیم، سپس می‌توانیم با لحاظ احتمال مرگ‌ومیر سالانه در مقادیر برآورد شده ارزش بیم‌سنجی سازگار با مزایا را به دست آوریم:

$$AL_0 = \sum_{k=1}^{20} V(0, K)_{k-1} P_0 q_{0+k-1}$$

### اعتباردهی بر اساس نرخ آنی $k$ -ساله: مدل هال-وایت تک عاملی

عموماً برای محاسبه ارزش سازگار بازار مزایای بازنشستگی کسب‌شده طرح توازن نقدینگی باید یک مدل سازگار بازار برای ساختار زمانی نرخ بهره و همچنین یک مدل توام برای  $r(t)$  و  $r^c(t)$  فرض کنیم. با برآزش مدل هال-وایت واسیچک تعمیم یافته می‌توان اطمینان یافت که فرایند  $r(t)$  سازگار با ساختار زمانی آغازین (در زمان ارزیابی) نرخ کوتاه‌مدت و در نتیجه با ارزش اوراق قرضه موجود در بازار در همان تاریخ است، همچنین می‌توان جواب‌های تحلیلی برای ارزش اوراق قرضه بدون کوپن یافت.

ارزش اوراق قرضه تحت مدل هال-وایت از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)} \quad (6)$$

که در آن

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$A(t, T) = \log\left(\frac{p(0, T)}{p(0, t)}\right) + f(0, t)B(t, T) - \frac{\sigma^2}{4a} B(t, T)^2 (1 - e^{-2at})$$

ارزش ورقه قرضه با سررسیدهای  $T$  و  $t$  یعنی به ترتیب  $p^M(0, T)$  و  $p^M(0, t)$  همچنین مقدار نرخ آنی به لحظه  $t$  با سررسید  $t$ ،  $f^M(0, t)$  از اطلاعات موجود در منحنی بازده در زمان  $t = 0$  به دست می‌آیند.

اگر نرخ اعتباردهی بر اساس نرخ آنی  $k$ -ساله (نرخ بازده بر اوراق قرضه بدون کوپن  $k$ -ساله) به علاوه یک سود حاشیه‌ای مدل شود:

$$r^c(t) = R(t, t+k) + m$$

انگاز از تعريف نرخ آنی و رابطه (۵) داریم:

$$V(0, T) = E_0^Q \left[ e^{\int_0^T \left( \frac{B(t, t+k)r(t) - A(t, t+k)}{k} + m - r(t) \right) dt} \right]$$

تنها عامل تصادفی در امید بالا  $r(t)$  است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$V(0, T) = \exp(mT) \exp\left(\int_0^T -\frac{A(t, t+k)}{k} dt\right) E_0^Q \left[ \exp\left(-\int_0^T \gamma r(t) dt\right) \right]$$

که  $\gamma = \left(1 - \frac{B(t, t+k)}{k}\right) = 1 - \left(\frac{1 - e^{-ak}}{ak}\right)$  و

$$E_0^Q \left[ \exp\left(-\int_0^T \gamma r(t) dt\right) \right]$$

$$= p(0, T)^\gamma \exp \left\{ \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( \left( \frac{1 - e^{-aT}}{a} \right) (1 - 2\gamma) + \frac{(1 - e^{-aT})^2}{2a} + \frac{\gamma(1 - e^{-2aT})}{2a} - T(1 - \nu) \right) \right\}$$

### اعتباردهی بر اساس نرخ آنی $k$ -ساله: مدل هال-وایت دو عاملی

تحت مدل هال-وایت تک عاملی، نرخ آنی  $k$ -ساله  $R(t, t+k)$  در هر زمان یک تابع خطی ساده از نرخ کوتاه‌مدت در آن زمان،  $r(t)$  است. یعنی همبستگی این متغیرها در مدل برای تمام  $t$  ها یک در نظر گرفته شده است (با توجه به این که  $B(t, T) > 0$ ). از طرفی رابطه (۴) نشان می‌دهد که رابطه بین نرخ کوتاه‌مدت و نرخ اعتباردهی عامل کلیدی در ارزش‌گذاری سازگار بازار مزایای بازنشستگی کسب شده است. همچنین ریسک تغییر پراکندگی بین نرخ کوتاه‌مدت و نرخ اعتباردهی در طول زمان، عامل بسیار معناداری در ارزش‌گذاری سازگار بازار مزایا را نمایان می‌سازد. بنابراین مدل را برای در نظر گرفتن تغییرات تصادفی بیشتر در رابطه تعمیم می‌دهیم. به این منظور از نسخه دو عاملی مدل هال-وایت استفاده می‌کنیم. فرض کنیم دینامیک فرایند نرخ کوتاه‌مدت تحت اندازه احتمال ریسک خنثی  $Q$  به صورت زیر تعریف شود:

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t), \quad r(0) = r_0$$

که فرایندهای  $\{x(t): t \geq 0\}$  و  $\{y(t): t \geq 0\}$  در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), \quad x(0) = 0$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), \quad y(0) = 0$$

که  $(W_1, W_2)$  حرکت براونی دو بعدی با همبستگی لحظه‌ای  $\rho$  به فرم زیر است

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$$



که  $a, b, \sigma, \eta$  مقادیر مثبتی هستند و  $-1 < \rho < 1$  است.  $\varphi$  یک تابع جبری است و در بازه  $[0, T]$  خوش تعریف است. همچنین  $F_t$  پالایه تولیدشده توسط اطلاعات به دست آمده از  $(x, y)$  تا زمان  $t$  است.

فرض کنیم، نرخ اعتباردهی برابر با  $r^c(t) = R(t, t+k) + m$  است، در این صورت داریم:

$$R(t, t+k) = \frac{-\log \frac{p^M(0, t+k)}{p^M(0, t)} + \frac{1}{2} [\psi(0, t+k) - \psi(0, t) - \psi(t, t+k)] + B_k(a)x(t) + B_k(b)y(t)}{k}$$

که  $B_k(\alpha) = \frac{1 - e^{-\alpha k}}{\alpha}$  است. با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۵) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} V(0, T) &= E^Q[e^{\int_0^T (r^c(t) - r(t)) dt}] = e^{mT} E[e^{\int_0^T (r_k(t) - r(t)) dt}] \\ &= \exp(mT) \exp\left(\int_0^T -\varphi(t) dt\right) \exp\left(\int_0^T -\frac{G(t, t+k)}{k} dt\right) E[e^{-\int_0^T (\gamma_1 x(t) + \gamma_2 y(t)) dt}] \end{aligned}$$

که

$$G(t, t+k) = \log \frac{p(0, t+k)}{p(0, t)} + \frac{1}{2} (\psi(t, t+k) + \psi(0, t) - \psi(0, t+k))$$

$$\psi(0, k) = \frac{\sigma^2}{a^2} [k - 2B_k(a) + B_k(2a)] + \frac{\eta^2}{b^2} [k - 2B_k(b) + B_k(2b)]$$

$$+ 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} [k - B_k(a) - B_k(b) + B_k(a+b)]$$

که  $\gamma_1 = 1 - B_k(a)$  و  $\gamma_2 = 1 - B_k(b)$  است. حال از (Mercurio, ۲۰۰۶) داریم:

$$V(0, T) = \exp(mT) \exp\left\{\int_0^T -\frac{G(t, t+k)}{k} dt\right\} \exp\{G^*(0, T)\}$$

که

$$G^*(t, t+k) = \log \frac{p(0, t+k)}{p(0, t)} + \frac{1}{2} (\psi^*(t, t+k) + \psi(0, t) - \psi(0, t+k))$$

$$\psi^*(0, k) = \frac{\gamma_1^2 \sigma^2}{a^2} [k - 2B_k(a) + B_k(2a)] + \frac{\gamma_2^2 \eta^2}{b^2} [k - 2B_k(b) + B_k(2b)]$$

$$+ 2\rho \frac{\gamma_1 \gamma_2 \sigma \eta}{ab} [k - B_k(a) - B_k(b) + B_k(a+b)]$$

## اعتباردهی بر اساس نرخ بازده اوراق خزانه دولتی

در طرح‌های بازنشستگی توازن نقدینگی معمولاً از نرخ اعتباردهی برابر با نرخ بازده بر اوراق خزانه دارای کوپن‌های شش ماهه  $y_k(t)$  استفاده می‌شود. در این قسمت قصد داریم نرخ اعتباردهی را بر اساس نرخ اوراق خزانه مدل‌بندی کنیم، به این منظور نرخ اوراق خزانه دولتی دارای کوپن‌های شش ماهه را توسط اوراق قرضه بدون کوپن شبیه‌سازی کنیم و سپس ارزش سازگار بازار مزایای بازنشستگی کسب‌شده را برآورد می‌کنیم. همان‌طور که اشاره کردیم، در این حالت پاسخ تحلیلی نمی‌توان یافت و باید از شبیه‌سازی مونت کارلو برای محاسبه ضرایب ارزش سازگار بازار استفاده کرد. با توجه به رابطه (۵) ضریب ارزش سازگار بازار مزایا در این حالت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V(0, T) = E^Q[\exp(\int_0^T (y_k(t) - r(t))dt)]$$

به این منظور با در نظر گرفتن همان مفروضات قبلی استفاده شده برای محاسبه ضرایب ارزش سازگار بازار مزایا در حالت اعتباردهی با نرخ‌های آنی، از الگوریتم زیر برای محاسبه ضرایب ارزش سازگار بازار استفاده می‌کنیم.

۱. در ابتدا با استفاده از دینامیک نرخ بهره تحت مدل هال-وایت و الگوی گسسته‌سازی اوپلر نرخ بهره کوتاه مدت را در انتهای هر روز معاملاتی (۲۵۲ روز) تا زمان بازنشستگی  $T$  شبیه‌سازی می‌کنیم. حالت گسسته نرخ کوتاه‌مدت تحت مدل هال-وایت به صورت زیر است

$$r(t_j + \delta t) = r(t_j) + (\theta(t_j) - a * r(t_j))\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}Z_{t_j}$$

که  $\delta t = \frac{1}{252}$ ،  $Z$  دارای توزیع نرمال استاندارد،  $t_i = t_{i-1} + \delta t$ ،  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_E = T$ ،  $r(t_0)$  از منحنی بازده مشاهده‌شده به دست می‌آید. همچنین

$$\theta(t_j) = \frac{\partial f^M(0, t_j)}{\partial t} + af^M(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at_j})$$

که در آن

$$f^M(0, t_j) \approx -\frac{\ln(p(0, t_j + \delta t)) - \ln(p(0, t_j - \delta t))}{2\delta t}$$

$$\frac{\partial f^M(0, t_j)}{\partial t} \approx \frac{f^M(0, t_j + \delta t) - f^M(0, t_j - \delta t)}{2\delta t}$$

۲. نرخ‌های بازده اوراق خزانه  $k$ -ساله را با استفاده از ارزش اوراق قرضه بدون کوپن شبیه‌سازی می‌کنیم، یعنی با استفاده از نرخ کوتاه‌مدت شبیه‌سازی شده در هر روز معاملاتی با استفاده از رابطه (۶) ارزش

اوراق قرضه بدون کوپن با سررسیدهای  $p(t_j, t_j + 0.5), p(t_j, t_j + 1), \dots, p(t_j, t_j + k)$  را به دست می‌آوریم.

۳. با استفاده از ارزش اوراق قرضه بدون کوپن محاسبه شده در هر روز نرخ بازده اوراق خزانه  $y_k(t_j)$  را به دست می‌آوریم.

$$1 = 0.5 \times y_k(t_j) \{ p(t_j, t_j + 0.5) + p(t_j, t_j + 1) + \dots + p(t_j, t_j + k) \}$$

۴. با استفاده از مقادیر به دست آمده در هر روز معاملاتی برای نرخ کوتاه‌مدت  $r(t_j)$  و نرخ بازده

اوراق خزانه  $y_k(t_j)$  مقدار انتگرال  $\exp(\int_0^T (y_k(t) - r(t)) dt)$  را با  $\exp(\sum_{j=0}^w (y_k(t_j) - r(t_j)) \delta t)$  برآورد می‌کنیم.

۵. مراحل ۴-۱ را به تعداد زیاد برای مثال ۱۰۰۰۰ بار تکرار می‌کنیم، میانگین این مقادیر برآورد ضریب ارزش سازگار بازار مزایای بازنشستگی کسب‌شده در طرح بازنشستگی توازن نقدینگی با نرخ اعتباردهی بر اساس اوراق خزانه است.

### ◀ روش‌های تأمین سرمایه برای طرح‌های توازن نقدینگی

طرح بازنشستگی توازن نقدینگی تحت قوانین ایالات متحده در ردیف طرح مزایای معین قرار دارد. طیف وسیعی از روش‌های مقبول تأمین سرمایه برای طرح‌های مزایای معین وجود دارد. در عمل برای ارزیابی طرح‌های توازن نقدینگی از روش‌های مورد استفاده برای مزایای معین مثل رویکرد سوم بیان‌شده در این بخش، استفاده می‌شود. به کار بردن این روش‌ها منجر به مشکلاتی مثل، برآورد تعهدات طرح توازن نقدینگی با روش‌های ارزیابی سنتی منجر به تعهدات با مبلغی کمتر از موجودی حساب فرضی می‌شود.

در این بخش دو رویکرد دیگر برای تعریف مزایای بازنشستگی کسب‌شده در نظر می‌گیریم و تعهدات بیم‌سنجی (در اینجا منظور ارزش فعلی مزایای بازنشستگی کسب‌شده بدون لحاظ مرگ‌ومیر است)  $AL^1$  و کسور نرمال (هزینه نرمال NC) طرح بازنشستگی توازن نقدینگی را تحت رویکردهای ارائه شده را بررسی کنیم. نرخ کسور نرمال، نسبت کسور نرمال به حقوق است. نرخ کسور نرمال در حالت کلی از نرخ کسورات اسمی (درصدی از حقوق) که در حساب اسمی سرمایه‌گذاری می‌شود متفاوت است.

فرض کنیم  $F_t$  مبلغ موجود در حساب فرضی مشترک صندوق در زمان ارزیابی طرح  $t$ ، به استثنای کسورات پرداخت‌شده در زمان  $t$  است،  $S_t$  حقوق در زمان  $t$  و  $C$  نرخ کسورات اسمی (درصدی از حقوق) را نشان بدهند. همچنین  $v_1(k)$  ضریب تنزیل  $k$ -ساله است که در روش ارزیابی سازگار بازار

1- Actuarial liability  
2- normal cost or normal contribution

برابر با ضریب تنزیل استفاده شده در منحنی بازده است، در اینجا  $v_i(k)$  برابر با ارزش یک ورقهٔ قرضهٔ بدون کوپن  $k$ -ساله است، یعنی

$$v_i(k) = p(t, t+k) = e^{-kR(t, t+k)}$$

$NC_t$  هزینهٔ نرمال در زمان  $t$  است و برابر با، مبلغ مورد نیاز در زمان  $t$  برای این که ارزش تجمیع شده مبلغ  $NC_t + AL_t$  تحت مفروضات ارزیابی در زمان  $t+1$  برابر با  $AL_{t+1}$  شود. اگر برای درک بهتر فرض کنیم، کسور نرمال به طور کامل در ابتدای هر سال پرداخت شوند و خروج پیش از زمان  $T$  را نادیده بگیریم آنگاه:

$$AL_t + NC_t = v_i(t)E_Q[AL_{t+1}]$$

تحت هر سه رویکرد که در ادامه آنها را شرح خواهیم داد، امید بالا تحت اندازهٔ احتمال ریسک ختشی  $Q$  است، همچنین در رویکرد دوم و سوم در محاسبه تعهدات بیم‌سنجی و هزینهٔ نرمال، نرخ اعتباردهی سالانه با نرخ  $i^c(t)$  فرض شده است. در ادامه سه رویکرد مورد نظر را بیان می‌شود و تعهدات بیم‌سنجی و هزینهٔ نرمال در هر رویکرد به دست آورده می‌شود:

**۱. سال‌های خدمت گذشته، اعتباردهی تا زمان بازنشستگی،** در بخش قبل روش محاسبه ارزش سازگار بازار مزایا تحت این رویکرد ارزیابی تعهدات را به طور مفصل بررسی کردیم. تحت این رویکرد، تعهدات بیم‌سنجی در زمان  $t$  برابر، ارزش فعلی مبلغ موجود در حساب فرضی است که تا زمان بازنشستگی  $T$  با در نظر گرفتن مدل فروضی برای نرخ اعتباردهی قرارداد شده در طرح تجمیع می‌شود. اگر برای ارزیابی طرح توازن نقدینگی، از روش و مفروضات سازگار بازار استفاده کنیم، تعهدات بیم‌سنجی در زمان ارزیابی، هزینهٔ تأمین مزایای بازنشستگی از طریق بازار سرمایه را نشان می‌دهد. طبق مطالب بیان شده  $V(t, T)$  ضریب ارزش سازگار بازار مزایای بازنشستگی کسب شده در زمان  $t$  است. در نتیجه تعهدات بیم‌سنجی در زمان  $t$  برای یک مشترک صندوق با  $T-t$  سال تا بازنشستگی با موجودی  $F_t$  برابر است با:

$$AL_t = F_t V(t, T)$$

هزینهٔ نرمال در این رویکرد، میزان هزینه‌ای است، که برای دریافت کسورات اسمی جدید برای حامی طرح به وجود می‌آید و یا به عبارتی، هزینهٔ نرمال ارزش فعلی مزایای بازنشستگی کسب شده برای کسورات اسمی جدید است؛ یعنی

$$NC_t = c S_t V(t, T)$$

در این رویکرد تعهدات بیم‌سنجی در زمان  $t$  مزایای کسب شده به ازای  $F_t$  است که همانند یک تعهد مالی با سررسید  $T$  ارزش گذاری می‌شود، به طور مشابه کسور نرمال در زمان  $t$  مزایای کسب شده به ازای کسورات اسمی جدید است، که به عنوان یک تعهد مالی با سررسید در زمان  $T$  ارزش گذاری می‌شود

۲. سال‌های خدمت گذشته، بدون اعتباردهی آتی. تحت این رویکرد تعهدات بیم‌سنجی در زمان  $t$  برابر است با مبلغ تجمیع‌شده در حساب فرضی هر مشترک صندوق طی سال‌های خدمت است، یعنی  $AL_t = F_t$

هزینه‌ی نرمال در این رویکرد، طبق تعریف هزینه‌ی نرمال:

$$NC_t = cS_t + (F_t + cS_t)((1 + i^c(t))v_i(1) - 1)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم هزینه‌ی نرمال شامل دو بخش است، بخش اول افزایش سرمایه‌ی ناشی از کسورات اسمی جدید و بخش دوم ارزش فعلی سود حاصل از اعمال نرخ اعتباردهی به مدت یکسال بر  $\{F_t\}$  و کسورات اسمی جدید است.

۳. سال‌های خدمت کامل، اعتباردهی تا زمان بازنشستگی، مزایای کسب‌شده متناسب با سال‌های خدمت

تحت این رویکرد مزایای کامل بازنشستگی با در نظر گرفتن مفروضات زیر پیش‌بینی می‌شود، یک مدل قطعی برای حقوق‌های آتی و نرخ‌های اعتباردهی آتی در نظر گرفته می‌شود، مزایای کامل بازنشستگی پیش‌بینی‌شده در زمان  $t$  با موجودی حساب فرضی  $F_t$  و اعتباردهی با نرخ  $\tilde{i}_{t+k}^c$  در سال  $t+k$  برابر است با:

$$\tilde{F}(T) = F_t(1 + \tilde{i}_t^c)(1 + \tilde{i}_{t+1}^c)(1 + \tilde{i}_{t+2}^c) \dots (1 + \tilde{i}_T^c) + \sum_{k=0}^{T-1} cS_{t+k}(1 + \tilde{i}_{t+k}^c)(1 + \tilde{i}_{t+k+1}^c) \dots (1 + \tilde{i}_{T-1}^c)$$

در این رویکرد فرض می‌کنیم، مزایای بازنشستگی کامل پیش‌بینی‌شده به طور خطی در طول سال‌های خدمت مشترک صندوق افزایش می‌یابد. در نتیجه تعهد بیم‌سنجی برای یک مشترک صندوق که در زمان  $T$  بازنشسته می‌شود در زمان ارزیابی  $t$  که دارای  $n$  سال سابقه کار است برابر است با:

$$AL_t = \frac{n}{n + T - t} \tilde{F}(T)v_i(T - t)$$

و هزینه‌ی نرمال برابر است با:

$$NC_t = \frac{1}{n + T - t} \tilde{F}(T)v_i(T - t)$$

در این رویکرد مفروضات زیادی برای در برآورد تعهدات در نظر گرفته می‌شود و تفسیر نتایج به دست آمده نسبت به دو رویکرد قبلی پیچیده‌تر است، البته در ادامه با توجه به نتایج حساسیت این رویکرد نسبت به سال‌های خدمت طولانی تا بازنشستگی نشان داده شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، این رویکرد شامل کسورات اسمی آتی‌ای است که هنوز بخشی از دریافتی‌های صندوق نیست. به لحاظ تکنیکی این به آن معناست که این رویکرد بر اساس مزایای بازنشستگی کسب‌شده

نیست. این رویکرد در واقع شکل تعدیل یافته ارزیابی طرح مزایای معین حقوق نهایی است، که در عمل به دلیل پیش بینی حقوق آتی روش واحد پیش بینی شده<sup>۱</sup> نامیده می شود.

**مثال ۱:** برای محاسبه ضرایب ارزش سازگار بازار بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می کنیم، در زمان ارزیابی طرح بازنشستگی موجودی حساب فرضی مشترک صندوق یک واحد یعنی  $F_0 = 1$  است، زمان تا بازنشستگی پنج، ده و یا بیست سال است، اعتباردهی در طرح بازنشستگی توازن نقدینگی بر اساس نرخ های زیر فرض می شود، مزایای کسب شده و ارزش سازگار بازار آن بر اساس مدل بندی نرخ های اعتباردهی زیر برآورد می شوند:

مدل	نرخ اعتباردهی
$r^c(t) = R(t, t + 30)$	نرخ آنی ۳۰ ساله
$r^c(t) = R(t, t + 20)$	نرخ آنی ۲۰ ساله
$r^c(t) = R(t, t + 10)$	نرخ آنی ۱۰ ساله
$r^c(t) = R(t, t + 5) + 0.0025$	نرخ آنی ۵ ساله + ۰,۲۵ درصد سود حاشیه ای
$r^c(t) = R(t, t + 1) + 0.01$	نرخ آنی ۱ ساله + ۱ درصد سود حاشیه ای
$r^c(t) = R(t, t + 0.5) + 0.015$	نرخ آنی ۰,۵ ساله + ۱,۵ درصد سود حاشیه ای
$r^c(t) = \text{Ln}(1.05)$	۵ درصد در سال، سالانه مرکب

از اطلاعات منتشره اوراق قرضه بدون کوپن امریکا بین سال ۱۹۹۸ تا اول آوریل ۲۰۱۳ برای برآورد پارامترها، تعیین ارزش سازگار بازار، بررسی حساسیت روش استفاده شده است. داده ها از سایت بلومبرگ<sup>۲</sup> جمع آوری شده اند. این داده ها شامل نرخ بازده اوراق قرضه بدون کوپن برای سررسید سه و شش ماهه و سررسیده های سالانه تا حداکثر سی سال است. داده ها به صورت ماهانه بین سال های ۱۹۹۸ تا ۲۰۱۳ جمع آوری شده اند.

در ابتدا با توجه به اطلاعات ماهانه منتشر شده در بازار اوراق قرضه بدون کوپن امریکا و نرخ بازده بر این اوراق بین سال ۲۰۱۲ تا ۲۰۱۳، پارامترهای مدل هال-وایت تک عاملی و دو عاملی را بر اساس رویکرد نوسانات نرخ های آنی منتشره (Park, ۲۰۰۴) برآورد می کنیم.

جدول شماره ۱۰ پارامترهای مدل هال-وایت تک عاملی

$\sigma$	$a$
۰,۰۰۴۴۱۵۷۵۷	۰,۰۲۸۲

1- projected unit method  
2- Bloomberg

جدول شماره ۲) پارامترهای مدل هال-وایت دو عاملی

$\rho$	$\eta$	$\sigma$	b	a
-۰,۹۹۹۹۴۱۶	۰,۰۳۷۱۷۰۴۵	۰,۰۳۵۴۴۰۱۶	۰,۲۱۹۰۱۵۳	۰,۰۹۳۷۱۷۲۸

با برازش مدل هال-وایت تک عاملی و دو عاملی با پارامترهای برآورد شده بر منحنی بازده، ارزش سازگار بازار به ازای یک واحد در حساب فرضی را به دست می‌آوریم، که نتایج زیر حاصل می‌شود:

جدول شماره ۳) ارزش سازگار بازار مزایا تحت مدل هال-وایت تک عاملی در تاریخ اول آوریل ۲۰۱۳

$T=۲۰$	$T=۱۰$	$T=۵$	نرخ اعتباردهی
۱,۳۶۶	۱,۲۳۸	۱,۱۷۰	نرخ آنی ۳۰ ساله
۱,۳۵۸	۱,۱۹۴	۱,۱۶۱	نرخ آنی ۲۰ ساله
۱,۲۳۳	۱,۱۰۴	۱,۰۹۳	نرخ آنی ۱۰ ساله
۱,۱۸۰	۱,۰۹۰	۱,۰۷۲	نرخ آنی ۵ ساله + ۰,۲۵ درصد
۱,۲۵۰	۱,۱۱۹	۱,۰۶۲	نرخ آنی ۱ ساله + ۱ درصد
۱,۳۶۵	۱,۱۶۹	۱,۰۸۳	نرخ آنی ۵,۵ ساله + ۱,۵ درصد
۱,۵۹۵	۱,۳۵۷	۱,۲۳۵	۵ درصد در سال، سالانه مرکب

جدول شماره ۴) ارزش سازگار بازار مزایا تحت مدل هال-وایت دو عاملی در تاریخ اول آوریل ۲۰۱۳

$T=۲۰$	$T=۱۰$	$T=۵$	نرخ اعتباردهی
۱,۳۹۵	۱,۲۶۰	۱,۱۷۷	نرخ آنی ۳۰ ساله
۱,۳۸۳	۱,۲۲۱	۱,۱۳۹	نرخ آنی ۲۰ ساله
۱,۲۹۴	۱,۱۲۴	۱,۰۹۸	نرخ آنی ۱۰ ساله
۱,۲۱۷	۱,۱۰۰	۱,۰۷۴	نرخ آنی ۵ ساله + ۰,۲۵ درصد
۱,۲۶۳	۱,۱۲۲	۱,۰۶۲	نرخ آنی ۱ ساله + ۱ درصد
۱,۳۷۶	۱,۱۷۱	۱,۰۸۳	نرخ آنی ۵,۵ ساله + ۱,۵ درصد
۱,۵۹۵	۱,۳۵۷	۱,۲۳۵	۵ درصد در سال، سالانه مرکب

همان‌طور که از نتایج به دست آمده مشاهده می‌کنیم، تأثیر در نظر گرفتن عامل تصادفی اضافی در مدل هال-وایت برای مدل‌بندی نرخ کوتاه در ارزش‌گذاری مزایای بازنشستگی کسب‌شده برای افق کوتاه‌مدت تا بازنشستگی کمتر از یک درصد است، در حالی این تأثیر برای افق بلندمدت تا بازنشستگی با در نظر گرفتن نرخ اعتباردهی بلندمدت تقریباً ۴ درصد و برای نرخ اعتباردهی کوتاه‌مدت در حدود یک درصد است.

مقادیر به دست آمده در دو جدول ۳ و ۴ را می‌توان به دو طریق تفسیر کرد:

اگر حامی طرح بازنشستگی بخواهد کلیه تعهدات به وجود آمده تا زمان ارزیابی را طی قراردادی به یک شرکت ثالثی منتقل کند، این ارقام ارزش‌گذاری منصفانه‌ای (بدون در نظر گرفتن سایر هزینه‌ها) بر اساس منحنی بازده در تاریخ اول آوریل ۲۰۱۳ برای این قرارداد هستند.

اگر تفاوت بین موجودی در حساب فرضی یک واحد و ضرایب ارزیابی سازگار بازار طرح توازن نقدینگی را در نظر بگیریم؛ برای مثال یک عضو با ده سال تا بازنشستگی و نرخ اعتباردهی بر اساس بازده ۳۰ ساله را در نظر بگیریم، آنگاه ضریب ارزش سازگار بازار به ازای ۱ واحد در جدول ۳ برابر است با ۱,۲۳۸. این بدان معناست که ۲,۲۳۸، واحد هزینه تضمین نرخ اعتباردهی برابر با نرخ آنی ۳۰ ساله بر حساب فرضی است.

همان‌طور که گفتیم در طرح‌های بازنشستگی توازن نقدینگی معمولاً از نرخ اعتباردهی بر اساس نرخ بازده اوراق خزانه استفاده می‌شود، با در نظر گرفتن این نرخ بررسی می‌کنیم که آیا نرخ بازده بر اوراق قرضه بدون کوپن به لحاظ این که تحت آن می‌توان به یک جواب تحلیلی رسید یک تقریب مناسب ارائه می‌دهد. با استفاده از الگوریتم بیان‌شده در اعتباردهی بر اساس نرخ بازده اوراق خزانه دولتی ارزش سازگار بازار مزایای بازنشستگی را برآورد می‌کنیم. در جدول (۵) مشاهده می‌کنیم مقادیر به دست آمده نزدیک به مقادیر جدول (۳) است. به طوری که برای افق بلندمدت ارزش سازگار بازار مزایا با نرخ بازده اوراق خزانه در حدود یک‌ونیم درصد کمتر است. بنابراین ارزش سازگار بازار مزایا تحت مدل هال-وایت با نرخ اعتباردهی بر اساس نرخ بازده اوراق قرضه بدون کوپن تقریباً مناسبی ارائه می‌دهد.

جدول شماره ۵) ارزش سازگار بازار مزایا تحت مدل هال-وایت تک عاملی در تاریخ اول آوریل ۲۰۱۳

T=۲۰	T=۱۰	T=۵	نرخ اعتباردهی
۱,۳۵۳	۱,۲۱۶	۱,۱۵۸	نرخ آنی ۳۰ ساله
۱,۳۴۷	۱,۱۷۱	۱,۱۲۳	نرخ آنی ۲۰ ساله
۱,۲۲۲	۱,۱۰۱۲	۱,۰۹۱۸	نرخ آنی ۱۰ ساله
۱,۱۷۷	۱,۰۸۷	۱,۰۷۱	نرخ آنی ۵ ساله + ۰,۲۵ درصد

بر اساس نرخ بازده اوراق خزانه، با ۱۰۰۰۰ شیب‌سازی

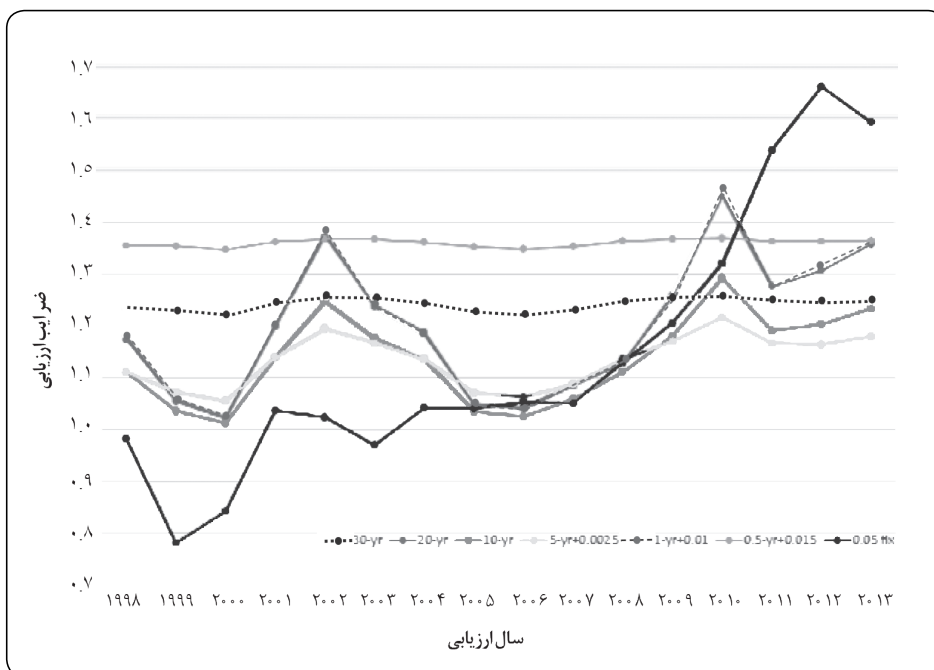


### تأثیر منحنی بازده ابتدایی بر ارزش سازگار بازار

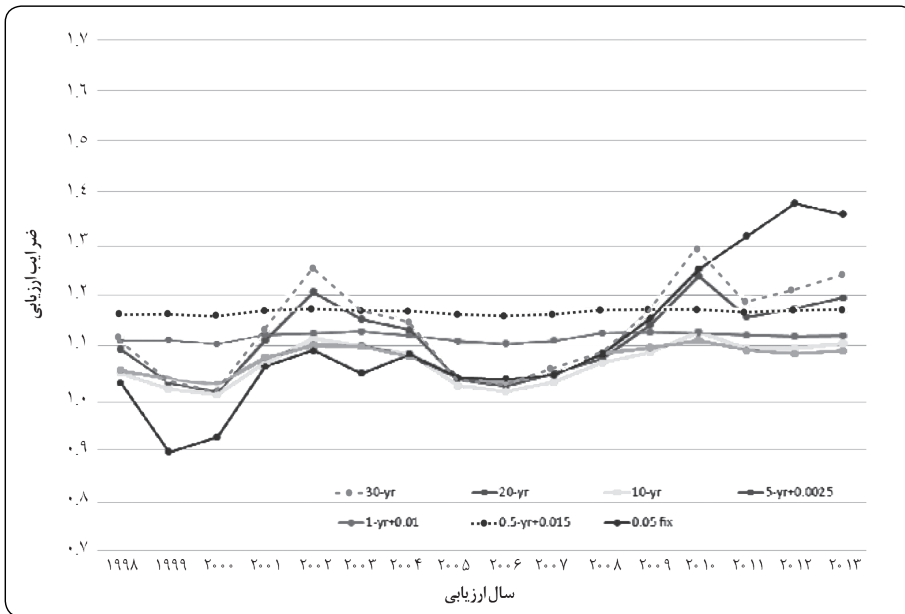
با توجه به این که نشان دادیم تأثیر در نظر گرفتن عامل تصادفی اضافی در مدل بندی نرخ کوتاه مدت بر ضرایب ارزش سازگار بازار مزایا تأثیر کمی دارد، در ادامه تنها با در نظر گرفتن مدل هال-وایت تک عاملی میزان حساسیت نتایج به تغییر منحنی بازده آغازین مفروض و تغییر روش برآورد پارامترها بررسی می‌کنیم.

یکی از ویژگی مدل‌های بدون آربیتراژ از قبیل هال-وایت این است که این مدل بر منحنی بازده در زمان ارزیابی به طور دقیق برازش داده می‌یابند، بنابراین شکل و سطح این منحنی تأثیر معنی داری بر مقدار برآورده شده ضرایب ارزش سازگار بازار مزایا ندارد. برای بررسی این تأثیر، ارزش سازگار بازار مزایا با فرض  $F_0 = 1$  تحت مدل هال-وایت تک عاملی، بر اساس منحنی‌های بازده در اول ماه نوامبر از سال ۱۹۹۸ تا ۲۰۱۲ و اول آوریل ۲۰۱۳ بدون تغییر پارامترهای برآورد می‌کنیم. برای نمایش حساسیت این روش به منحنی بازده ابتدایی نمودار مقادیر به دست آمده در طول زمان، برای افق‌های زمانی ۲۰، ۱۰ و ۵ به ترتیب در نمودار (۱)، (۲) و (۳) رسم شده است.

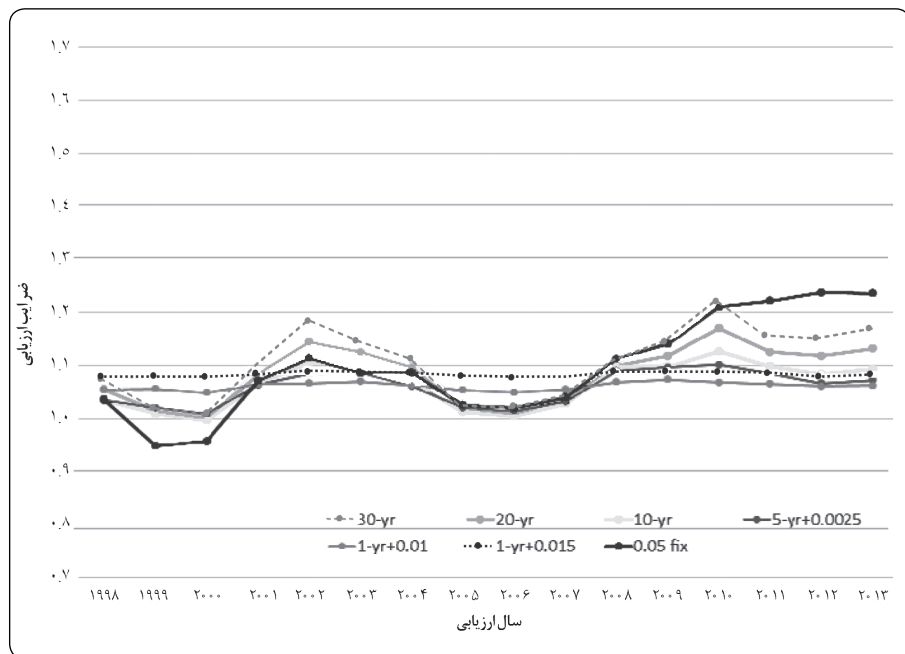
نمودار شماره ۱) ضرایب ارزش سازگار بازار با افق ۲۰ ساله



نمودار شماره ۲) ضرایب ارزش سازگار بازار با افق ۱۰ ساله



نمودار شماره ۳) ضرایب ارزش سازگار بازار با افق ۵ ساله



چند نکته از نمودارهای بالا می‌توان مشاهده کرد. اول این که ضرایب ارزش سازگار بازار مزایا به منحنی بازده در نظر گرفته بسیار حساس هستند، اما این تأثیر برای اعتباردهی بر اساس نرخ ثابت، برای افق زمانی طولانی تر  $T$  و نرخ اعتباردهی بر اساس نرخ آنی با دوره‌ی طولانی  $k$  بسیار بیشتر است.

همان‌طور که از شکل (۱) مشاهده می‌کنیم، واریانس ضرایب ارزش سازگار بازار مزایا بر اساس نرخ اعتباردهی ثابت بسیار بیشتر از هر یک نرخ‌های اعتباردهی بر اساس نرخ‌های بازار است، همچنین در منحنی‌های به‌دست‌آمده بر اساس نرخ‌های بازار (به جز نرخ ثابت)، با کاهش  $k$  واریانس منحنی نیز در طول دوره‌ی در نظر گرفته‌شده کاهش می‌یابد، به‌طوری‌که بیشترین واریانس در حالت اعتباردهی بر اساس نرخ بازده ۳۰ ساله و ۲۰ ساله است (مقادیر آنها بسیار بهم نزدیک است). از طرف دیگر، واریانس ضرایب ارزش سازگار بازار با اعتباردهی شش‌ماهه و یک‌ساله تقریباً در طی سال‌ها ارزیابی به صورت یکنواخت است.

این نتایج در ابتدا متضاد با انتظار اولیه ما بنظر می‌رسند، به‌طوری‌که برعکس انتظار ابتدایی، بیشترین واریانس در مقادیر برآوردشده با به‌کاربردن نرخ‌های اعتباردهی که کمترین واریانس را دارند یعنی نرخ ثابت و نرخ برابر با بازده ۳۰ ساله بر اوراق قرضه بدون کوپن که نسبت به نرخ بازده بر شش‌ماهه بسیار کمتر است حاصل شده‌است. اما در واقع دلیل به‌وجود آمدن این نتایج وابستگی ضرایب ارزش سازگار بازار به واریانس اختلاف نرخ اعتباردهی و نرخ بهره کوتاه‌مدت است، واضح است نوسانات مابین نرخ اعتباردهی سی سال و نرخ کوتاه‌مدت نسبت به نوسانات مابین نرخ شش ماه و کوتاه‌مدت بسیار بیشتر است.

نکته دوم، دلیلی مبنی بر این‌که، هزینه‌ی تأمین مزایای توازن نقدینگی همواره با گذشت زمان افزایش یافته وجود ندارد، همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، به جز نرخ اعتباردهی ثابت، هزینه‌ی اعتباردهی طرح با هر کدام از نرخ‌ها مرتبط بازار در چند سال ابتدای از سال ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۰ کاهش یافته، سپس تا سال ۲۰۰۲ افزایش یافت، سپس دوباره کاهش یافته و از سال ۲۰۰۸ به بعد افزایش یافته است. اگر به نرخ‌های آنی منتشره در بازار در سال‌های ابتدای دقیق‌تر نگاه کنیم، برای مثال اگر نرخ اعتباردهی بر مبنای نرخ آنی سی سال که در بین طرح‌های توازن نقدینگی نیز متداول است را در نظر بگیریم، متوجه می‌شویم، مابین سال‌های ۱۹۹۸ نرخ‌های بلندمدت حدود شش درصد و کوتاه‌مدت حدود پنج درصد بوده، در سال ۲۰۰۰ نرخ کوتاه‌مدت بیشتر از بلندمدت به ترتیب در حدود شش درصد و پنج درصد بود، همین امر باعث کاهش هزینه‌ی اعتباردهی با نرخ برابر با بازده ۳۰ ساله شده‌است. اما از سال ۲۰۰۱ به بعد نرخ‌های بلندمدت بسیار بیشتر از کوتاه‌مدت بود و باعث شده هزینه‌ی اعتباردهی شده افزایش یابد. همچنین همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، در سال ۲۰۱۰ بیشترین هزینه برای اعتباردهی با نرخ ۳۰ ساله به دست آمده، دلیل این است که نرخ کوتاه‌مدت در آن تاریخ بسیار کوچک بود است.

در مورد نرخ ثابت مسئله کمی متفاوت است، در این حالت هزینه تضمین نرخ اعتباردهی تنها به نرخ آنی-T ساله وابسته است. وقتی که نرخهای بازار بالا است، هزینه پایین است و وقتی نرخ بدون ریسک کم است برای مثال همانند سالهای اخیر هزینه تأمین مزایای بازنشستگی کسب شده برای نرخ پنج درصد بالا است. همچنین همان طور که پیش تر نیز گفتم و از شکل های قبلی مشاهده می کنیم، به دلیل این که در سال های آغازین نرخ کوتاه مدت بیشتر از پنج درصد بوده هزینه اعتباردهی نرخ پنج درصد کمتر از یک واحد با هر افق زمانی است.

**مثال ۲:** در ادامه در قالب مثالی نتایج به دست آمده تحت سه رویکرد د بیان شده در بخش روش های تأمین سرمایه برای طرح های توازن نقدینگی را با یکدیگر مقایسه می کنیم.

**مثال:** یک طرح بازنشستگی توازن نقدینگی با مفروضات زیر در نظر بگیریم. کسورات ۶ درصد حقوق سالانه فرد، نرخ اعتباردهی برابر با نرخ آنی ۳۰ ساله در تاریخ اول آوریل ۲۰۱۳ بدون سود حاشیه ای است، سال های خدمت لازم برای بازنشستگی ۲۰ سال است و بازنشستگی پیش از موعد مجاز نیست، در محاسبه تعهدات بیم سنجی یا همان ارزش فعلی مزایای بازنشستگی کسب شده مرگ و میر نادیده گرفته می شود. سه عضو فرضی با مفروضات بیان شده در جدول (۶) را در نظر می گیریم.

جدول شماره ۶) مفروضات اعضای طرح بازنشستگی فرضی

عضو	سنوات گذشته	سنوات آنی	حقوق در زمان ارزیابی	سرمایه در زمان ارزیابی
A	۱	۱۹	۵۰۰۰۰	۳۰۰۰
B	۱۰	۱۰	۶۰۰۰۰	۵۵۰۰۰
C	۱۹	۱	۷۵۰۰۰	۱۰۰۰۰۰

تعهدات بیم سنجی و هزینه های نرمال تحت سه رویکرد بیان شده در جدول (۷) زیر نمایش داده شده است.

جدول شماره ۷) تعهدات بیم سنجی و هزینه های نرمال

عضو	تعهدات بیم سنجی			هزینه های نرمال		
	روش ۱	روش ۲	روش ۳	روش ۱	روش ۲	روش ۳
A	۴۰۸۶	۳۰۰۰	۳۴۳۰	۴۰۸۶	۳۲۰۹	۳۴۲۹
B	۶۸۰۹۰	۵۵۰۰۰	۵۲۹۱۹	۴۴۵۶	۵۶۴۰	۵۲۹۲
C	۱۰۳۶۰۰	۱۰۰۰۰۰	۱۰۲۷۳۱	۴۶۶۲	۸۱۲۸	۵۴۰۷

برای این که قادر به مقایسه‌ی سه روش با یکدیگر شویم، فرض کنیم ضریب ارزش‌گذاری مزایا نسبت تعهدات بیم‌سنجی  $AL_t$  به موجودی حساب فرضی  $F_t$  قبل از دریافت کسورات در زمان  $t$  و نرخ کسور نرمال یا همان نرخ هزینه‌های نرمال نسبت هزینه‌ی نرمال  $NC_t$  به حقوق فرد در زمان ارزیابی است.

جدول شماره ۸) ضرایب ارزش‌گذاری مزایا و نرخ هزینه‌های نرمال تحت سه رویکرد

عضو	ضرایب ارزش‌گذاری مزایا			نرخ هزینه‌های نرمال		
	روش ۱	روش ۲	روش ۳	روش ۱	روش ۲	روش ۳
A	۱,۳۶۲	۱	۱,۱۴۳	۰,۰۸۲	۰,۰۶۴	۰,۰۶۹
B	۱,۲۳۸	۱	۰,۹۶۲	۰,۰۷۴	۰,۰۹۴	۰,۰۸۸
C	۱,۰۳۶	۱	۱,۰۲۷	۰,۰۶۲	۰,۱۰۹	۰,۰۷۲

ضرایب ارزش‌گذاری مزایا در رویکرد اول وابسته به  $V(0,T)$  هستند، همان‌طور که قبلاً مشاهده کردیم، ضرایب ارزش سازگار بازار مزایا  $V(0,T)$  برای سررسیدهای با افق بلندمدت به بیان دیگر برای اعضای با سال‌های کم نسبت به اعضا نزدیک به زمان بازنشستگی مقادیر بزرگ‌تری هستند. به لحاظ شهودی  $V(0,T)$  هزینه‌ی پیش‌پرداخت برای تضمین نرخ اعتباردهی از زمان ارزیابی تا بازنشستگی را در طرح نمایش می‌دهد، به عبارت دیگر هزینه‌ی پوشش تفاضل مابین نرخ اعتباردهی و نرخ کوتاه‌مدت بدون ریسک استفاده‌شده برای تنزیل ارزش مزایای بازنشستگی کسب‌شده از زمان بازنشستگی به زمان ارزیابی است. با توجه به این که در اکثر مواقع نرخ اعتباردهی بزرگ‌تر از نرخ کوتاه‌مدت بدون ریسک است هزینه‌ی پیش‌پرداخت بزرگ‌تر از یک است، مگر آنکه در طی دوره‌ی ارزیابی طرح بازنشستگی تا زمان بازنشستگی نرخ کوتاه‌مدت بدون ریسک بیشتر از نرخ اعتباردهی شود. همچنین همان‌طور که انتظار داریم، در این رویکرد برای تأمین سرمایه‌ی بزرگ‌تر در دوره‌های ابتدایی ورود به طرح (اعضا با سال‌های کم) نرخ کسور نرمال مقادیر بزرگ‌تر نسبت به سال‌های انتهای هستند.

در رویکرد دوم بنابر تعریف، ضرایب ارزش‌گذاری مزایا همواره برابر با یک هستند. در این روش ضرایب ارزش‌گذاری مزایا در واقع هزینه‌ی اتمام قرارداد  $F_0 = 1$  در زمان ارزیابی طرح بازنشستگی توازن‌نقدینگی را نمایش می‌دهند. کسور نرمال مبلغ مورد نیاز برای تأمین هزینه‌ی ناشی از افزایش مقدار  $F_t$  به واسطه دریافت کسورات اسمی و هزینه‌ی ناشی از سود تضمین‌شده حاصل از اعمال نرخ اعتباردهی بر سرمایه‌ی  $F_t + cS_t$  است. به وضوح این هزینه‌های نرمال با گذشت سال‌های خدمت به واسطه افزایش سرمایه‌ی  $F_t$  افزایش می‌یابند. همان‌طور که در جدول (۸) مشاهده می‌کنیم در ابتدای دوره مقدار نرخ کسور نرمال نزدیک به نرخ کسورات اسمی شش درصد است اما با گذشت زمان و نزدیک شدن به زمان بازنشستگی این مقدار برابر با ده درصد شده‌است. این روش دارای این

امتیاز است که در زمان ارزیابی برای محاسبه تعهدات بیم‌سنجی هیچ فرضی برای ادامه طرح در زمان آتی در نظر گرفته نشده است، همچنین هزینه کمتری برای اعضا جدید برآورد می‌شود. اما اگر ترکیب جمعیتی طرح به سمت پیر شدن حرکت کند، افزایش نرخ کسور نرمال می‌تواند یک مشکل برای طرح بازنشستگی ایجاد کند.

در رویکرد سوم نتایج به دست آمده وابسته به مفروضات بیم‌سنجی در نظر گرفته شده برای حقوق‌ها و نرخ‌های اعتباردهی آتی هستند. با توجه به این که، الگوی قابل پیش‌بینی برای سررسیدهای کوتاه و بلندمدت تا بازنشستگی مشاهده نمی‌شود، تفسیر نتایج به دست آمده مشکل است. برای اعضای با افق بلندمدت تا بازنشستگی نتایج بسیار حساس به مفروضات در نظر گرفته شده هستند. در این روش چون مفروضات غیرعینی هستند، نتایج برای مقایسه ریسک تأمین سرمایه بین طرح‌ها کمتر قابل اطمینان هستند. به عنوان مثال برای محاسبه حق بیمه تضمین مزایای بازنشستگی، در آن هیچ مکانیسمی که اطمینان دهد ضرایب ارزیابی بزرگ‌تر از تعهدات اختتام قرارداد که برابر با حساب فرضی در زمان انصراف است، وجود ندارد؛ برای مثال برای عضو B ضریب ارزش‌گذاری مزایا ۰.۹۶ است، به این معناست که تعهدات بیم‌سنجی برای این فرد چهار درصد کمتر از مزایای اختتام قرار داد است.

در دستیابی به نتایج قبلی از نرخ بهره کوتاه‌مدت بدون ریسک سازگار با بازار برای تنزیل ارزش تعهدات بازنشستگی (مزایای بازنشستگی کسب‌شده) استفاده کردیم، اما معمولاً برای محاسبه تعهدات صندوق‌های بازنشستگی از نرخ‌های تنزیل مرتبط با نرخ اوراق قرضه شرکت‌ها استفاده می‌شود. اوراق قرضه شرکتی با رتبه AA برای دوره‌ی کوتاه‌مدت حدود ۲۵ هزارم و برای دوره‌ی بلندمدت در حدود یک صدم بیشتر از نرخ بهره کوتاه‌مدت بدون ریسک است. با انجام تعدیل مناسب بر مقادیر به دست آمده با فرض تنزیل بر پایه نرخ کوتاه‌مدت جدول (۸) می‌توانیم ضرایب ارزش‌گذاری مزایای بازنشستگی کسب‌شده را با در نظر گرفتن نرخ تنزیل مرتبط با اوراق شرکت را به دست آوریم، که نتایج زیر حاصل می‌شود.

جدول شماره ۹) ضرایب ارزش‌گذاری مزایا و نرخ هزینه‌های نرمال با تنزیل بر اساس نرخ مرتبط با نرخ اوراق قرضه شرکت

عضو	تعهدات بیم‌سنجی			هزینه‌های نرمال		
	روش ۱	روش ۲	روش ۳	روش ۱	روش ۲	روش ۳
A	۱,۱۲۶	۱	۰,۹۴۵	۰,۶۸	۰,۶۴	۰,۵۷
B	۱,۱۴۳	۱	۰,۸۸۸	۰,۶۸	۰,۹۴	۰,۸۱
C	۱,۰۳۳	۱	۱,۰۲۴	۰,۶۲	۰,۱۰۹	۰,۷۲

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم با تغییر نرخ تنزیل مقادیر برآورد شده برای روش دوم تغییر نمی‌کند و میزان تغییرات برای عضو C در حدود سه هزارم است. برای روش یک و سه ضرایب ارزش‌گذاری مزایای بازنشستگی کسب‌شده برای عضو B در حدود نه درصد و برای عضو A در حدود ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. اما هنوز ضرایب ارزش‌گذاری مزایا برای روش یک هنوز بیشتر از یک است، چون که میانگین نرخ‌های اعتباردهی از نرخ‌های اوراق قرضه شرکت بیشتر هستند.

## نتایج

طرح بازنشستگی در ایران از ساده‌ترین طرح‌های بازنشستگی یعنی دریافت کسور بازنشستگی از اعضای فعال و پرداخت وجوه جمع‌آوری شده به اعضای بازنشسته، از کارافتاده و بازمانده تبعیت می‌کند. امروزه با توجه به افزایش سن جمعیت و کاهش نرخ پشتیبانی، تعادل بین منابع و مصارف برهم خورده است، بنابراین نیاز به اصلاح طرح بازنشستگی در کشور به طور جدی احساس می‌شود. به طور معمول دو راه حل برای این موضوع وجود دارد: راه حل اول عبور از این بحران و بازگرداندن تعادل به طور معمول اصلاحات پارامتری است. اصلاحات پارامتری از قبیل افزایش سن بازنشستگی، افزایش کسور سهم کارمند یا کارفرما و... است، با این حال اصلاحات پارامتری راه حل کوتاه‌مدت می‌باشد و در بلندمدت مجدداً بحران به وجود خواهد آمد. راه حل دوم اصلاحات ساختاری است. از اصلاحات ساختاری می‌توان به عبور از طرح‌های بازنشستگی تأمین سرمایه نشده به طرح‌های به طور کامل تأمین سرمایه‌شده، به منظور کاهش تأثیر نرخ پشتیبان و افزایش سن جمعیت اشاره کرد. هدف از این مقاله پیشنهاد طرح بازنشستگی توازن نقدینگی با توجه به امتیازاتی که نسبت به طرح‌های کسور معین و مزایای معین دارد، به عنوان یک اصلاح ساختاری است. عموماً طبق دسته‌بندی‌های انجام شده طرح‌های توازن نقدینگی جزو طرح‌های مزایای معین در نظر گرفته شده‌اند و از روش‌های ارزیابی مناسب آن طرح‌ها برای طرح توازن نقدینگی نیز استفاده می‌شود، که منجر به نتایج صحیحی نمی‌گردد. در این مقاله روشی مبتنی بر اطلاعات موجود در بازار مالی برای برآورد تعهدات طرح‌های توازن نقدینگی ارائه شده است که نتایج حاصل بیان می‌کنند، با استفاده از رویکرد ارزیابی سازگار بازار در طرح‌های توازن نقدینگی دو مشکل کم‌برآوردی ارزش تعهدات انصراف از قرارداد و افزایش شدید نرخ کسور نرمال با افزایش سال‌های خدمت رفع می‌شود، بنابراین رویکردی مناسب‌تری برای ارزیابی تعهدات طرح توازن نقدینگی و تأمین سرمایه، خاصه با افق دید بلندمدت است.

- Bjork, T. (2009). Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press.
- Lowman, T. B. (2001). Actuarial Aspects of Cash Balance Plans. The Society of Actuaries.
- McMonagle, D. R. (2001). Cash Balance Plans in a Traditional Defined Benefit World. Society of Actuaries, 411, 1-53.
- Mercurio, D. B. (2006). Interest rate models-theory and practice. Springer-Verlag Berlin.
- Murphy, R. J. (2001). The Cash Balance Funding Method. The Society of Actuaries.
- Park, F. C. (2004). Implementing Interest Rate Models: A Practical Guide. Capital Markets and Portfolio Research (CMPR).
- Schieber, R. L. (2000). Cash Balance Pension Plans: A Case of Standard Setting Inadequacy. Critical Perspectives on Accounting, 20.
- Sher, S. J. (1998). A Benefit Value Comparison of a Cash Balance Plan with a Traditional Final Average Pay BD Plan. Pension Forum, 11.
- Warshawsky, T. H. (2010). Hybrid Pension Plans: A Comprehensive Look At Their History, Economics And Features. Towers Watson Perspectives Report.